

Konstruktion der reellen Zahlen 1

von
Philipp Bischoff

1.Motivation	3
1.1. Konstruktion von \mathbb{R} im allgemeine	3
2.Voraussetzung	3
2.1Die Menge \mathbb{Q} zusammen mit den beiden Verknüpfungen	3
2.2Die Rationalen Zahlen solle folgende Eigenschaften erfüllen	3
2.3Eigenschaften von \mathbb{N} :	3
3.Definition	3
3.1. Definition der Nullfolge in \mathbb{Q}	3
3.2. Definition der Cauchyfolge in \mathbb{Q}	4
3.2.1Lemma 1	4
3.2.2Lemma 2	4
3.2.3Lemma 3	4
3.3. Äquivalenzrelation	5
3.3.1 Äquivalenzklassen	5
4. Definition der reellen Zahlen	5
4.1 Definition der Äquivalenzrelation	5
4.2 Beweis der Äquivalenzrelation	6
4.3Definition von \mathbb{R}	6
5.Beweis der Körperaxiome	6
5.1 Definition der Addition auf \mathbb{R}	6
5.1.1 Wohldefiniertheit der Addition	6
5.2 Definition einer Multiplikation auf \mathbb{R}	7
5.2.1Wohldefiniertheit der Multiplikation	7
5.3 Eigenschaften eines Körper	7
5.4 Nachweis der Körperaxiome bei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$	7
6. Anordnungsaxiome	10
6.1 Definition Anordnungsaxiome	10
6.2 Definition Positiv	10
6.3 Beweis der Anordnungsaxiome	10
7.Resümee	10

1.1 Motivation

Wir haben in der Analysis 1 Vorlesung die reellen Zahlen als „Gott gebend“ betrachtet, aber wenn man sich an die Schule erinnert hat man damals mit den Natürlichen Zahlen angefangen. Und hat daraus die Ganzen Zahlen hergeleitet und aus diesen wiederum die Rationale Zahlen. Jetzt kann man denken, dass die Rationale Zahlen die ganze Zahlengerade ausfüllt das ist aber nicht der Fall wie man an der Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{2}{x_n})$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$) sehen kann. Also wollen wir die Rationale Zahlen um die Irrationale Zahlen zu den Reellen Zahlen erweitern. Das Ziel diesem Vortrag wird es sein die Reellen Zahlen aus den Rationalen Zahlen zu konstruieren und dass sie mit der Addition und Multiplikation $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper darstellt, die Anordnungsaxiome und sogar Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Das Vollständigkeitsaxiom wird im Zweiten Teil bewiesen.

1.1 Allgemeines zur Konstruktion

Es gibt mehrere Möglichkeiten \mathbb{R} aus den \mathbb{Q}

- Mit Hilfe des Dedekindsche Schnitts
- Als Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen
- Als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen

Wir werden in diesen Vortrag die reellen Zahlen mit Hilfe der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen konstruieren

2. Voraussetzung: Wir sehen den Körper der rationalen Zahlen als gegeben voraus. Also genauer gesagt:

2.1 Die Menge \mathbb{Q} zusammen mit den beiden Verknüpfungen

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(a, b) \rightarrow a + b$ (Addition genannt)

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(a, b) \rightarrow a \cdot b$ (Multiplikation genannt)

2.2 Die Rationalen Zahlen solle folgende Eigenschaften erfüllen

I. Körperaxiome, II. Anordnungsaxiome. Es werden die üblichen Bezeichnungen $1, 0, a > b, a \geq b, a - b, a^{-1}$, etc. verwendet.

2.3 Eigenschaften von \mathbb{N} :

- 1) Die Zahl 1 ist in \mathbb{N} enthalten und sie ist die kleinste Zahl von \mathbb{N} .
- 2) Die Summe $n+m$ von zwei Zahlen aus \mathbb{N} ist in \mathbb{N} enthalten und im Falle $n > m$ auch $n - m$.
- 3) Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $x \in \mathbb{Q}$ ein Element mit $n < x < n + 1$, so ist x nicht in \mathbb{N} enthalten.
- 4) Jede nicht leere Teilmenge von \mathbb{N} besitzt ein Minimum.
- 5) Jedes Element von $\mathbb{Q} > 0$ ist in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ darstellbar.
- 6) Zu jedem $a \in \mathbb{Q}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

3. Definition

3.1. Definition der Nullfolge in \mathbb{Q}

Ein Folge (a_n) von Elementen aus \mathbb{Q} heißt Nullfolge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{Q}$) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| < \epsilon \quad \forall n > n_0$$

gibt

3.2. Definition der Cauchyfolge in \mathbb{Q}

Ein Folge (a_n) von Elementen aus \mathbb{Q} heißt **Cauchyfolge**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{Q}$) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n > n_0$$

gibt.

3.2.1 Lemma 1

Behauptung: Cauchyfolgen sind beschränkt

Beweis:

Zu $\epsilon := 1$ existiert nach Definition 3.2 ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt $|(a_n - a_m)| < \epsilon = 1$ für alle $n, m > N_0$

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0+1} + a_{n_0+1}| \leq |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}| < 1 + |a_{n_0+1}|$$

Wählt man jetzt $S := \max(\{|a_n| \mid n < N\} \cup \{a_{N_0+1}\})$, so gilt $|a_n| \leq S$ □

3.2.1 Lemma 2.

Behauptung: Ein Cauchyfolge die keine Nullfolge ist, kann nur endlich viele Nullen haben.

Beweis:

Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an eine Cauchyfolge a_n ist keine Nullfolge und besitzt unendlich viele Nullen.

Jetzt gibt es eine Teilfolge $v_1 < v_2 < v_3 \dots$ die nur aus Nullen bestehen \rightarrow Dann gilt Sei nun $\epsilon > 0$

$$|(a_n - a_{v_n})| < \epsilon \Rightarrow |a_n| < \epsilon$$

$\Rightarrow a_n$ ist eine Nullfolge, denn wir haben in Analysis 1 gezeigt konvertiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge gegen 0 so konvertiert jede Teilfolge gegen 0. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme. □

3.3.3 Lemma 3:

Behauptung: Zu jeder Cauchyfolge a_n , welche keine Nullfolge ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $|a_n| > \epsilon$ für fast alle n gilt. Wir beweisen diese Aussagen wieder indirekt:

Beweis:

Wir nehmen an das die Aussage für unendlich viele ϵ falsch ist und a_n ein Cauchyfolge ist die keine Nullfolge ist. Also gibt es eine Teilfolge a_{v_n} das $|a_{v_n}| < \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$ gilt also auch

$$|a_{v_n}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daraus folgt das a_{v_n} eine Nullfolge ist. Das ist aber Widerspruch zur Annahme. □

Als nächstes führen wir zwei Bezeichnung ein

N ist die Menge aller Nullfolgen in \mathbb{Q}

C ist die Menge aller Cauchyfolgen in \mathbb{Q}

3.3 Definition Äquivalenzrelation

Ein Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Relation \sim (Eine Teilmenge von $M \times M$)auf M mit folgenden Eigenschaften :

$$\begin{aligned} a \sim a & \quad (\text{Reflexivität}) \\ a \sim b \Rightarrow b \sim a & \quad (\text{Symmetrie}) \\ a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c & \quad (\text{Transitivität}) \end{aligned}$$

3.3.1 Definition Äquivalenzklassen

Man bezeichnet $[a] := \{x \in M, x \sim a\}$ die Menge aller mit äquivalenten Elementen. $[a]$ heißt **Äquivalenzklassen** Zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder Disjunkt

Beweis:

Annahme: $[a] \neq [b]$ und $c \in [a], c \in [b]$
 $\Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also können Äquivalenzklassen nur gleich oder Disjunkt sein.

Beispiel:

Sei M , die Menge aller ganzen Zahlen. (\mathbb{Z}) Unsere Äquivalenzrelation ist in diesen Fall

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b = 5k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Wir wollen jetzt mal die Äquivalenzrelation nachprüfen, also muss einfach die Axiome nachrechnen

1. $a \sim a$

$$a - a = 0 = 5 \cdot 0$$

2. $a \sim b \rightarrow b \sim a$

$$a - b = 5k_1$$

$$b - a = -(-b + a) = -5k_1 = 5(-k_1)$$

3. $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$

$$a - b = 5k_1, b - c = 5k_2$$

$$a - c = a - b + b - c = 5k_1 + 5k_2 = 5(k_1 + k_2) \quad \square$$

Damit haben wir nachgewiesen das dies eine Äquivalenzrelation ist.

4. Definition der Reellen Zahlen

4.1 Definition der Äquivalenzrelation

Wir wollen die Reelle Zahlen als Faktorgruppe C/N konstruieren.

Als erstes definieren wir eine Äquivalenzrelation auf die Menge C .

Eine Cauchyfolge (a_n) ist genau dann äquivalent zur einer Cauchyfolge (b_n) wenn $(a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n) \text{ Nullfolge}$$

Als erstes muss man jetzt über prüfen ob das überhaupt eine Äquivalenzrelation ist.

4.2 Beweis der Äquivalenzrelation 1. Zu zeigen $(a_n) \sim (a_n)$
Beweis:

$$(a_n) - (a_n) = 0(\text{Nullfolge})$$

2. Zu Zeigen $(a_n) \sim (b_n) \Rightarrow (b_n) \sim (a_n)$

Beweis:

$$(b_n - a_n) = -((a_n - b_n)) \text{Nullfolge}$$

3. Transitivität

Zu Zeigen $(a_n) \sim (b_n)$ und $(b_n) \sim (c_n) \Rightarrow (a_n) \sim (c_n)$

Beweis:

$$(a_n - c_n) = (a_n - b_n + b_n - c_n) = (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \rightarrow \text{Nullfolge}$$

Jetzt hat man gezeigt das die vorhin definierte Relation wirklich eine **Äquivalenzrelation** ist. □

Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen der Cauchyfolge (a_n) mit $[a_n]$ Zwei Cauchyfolgen aus einer Äquivalenzklasse unterscheiden sich nur um eine Nullfolge.

4.3 Definition von \mathbb{R}

$$\mathbb{R} := \{[a_n]; (a_n) \text{ (Cauchyfolge in } \mathbb{Q})\}$$

5. Beweis der Körperaxiome

Als erstes müssen wir jetzt zwei Verknüpfungen auf \mathbb{R} definieren.

5.1 Definition der Addition auf \mathbb{R}

$$[a_n] + [b_n] := [a_n + b_n]$$

5.1.1 Wohldefiniertheit der Addition

Seien $a_n, a'_n \in [a_n]$ und $b_n, b'_n \in [b_n]$

Zz: $[a + b] = [a'_n + b'_n]$

Beweis:

Nach der Äquivalenzrelation muss man zeigen das $a_n + b_n - (a'_n + b'_n)$ eine Nullfolge ist.

$$\Leftrightarrow a_n + b_n - a'_n - b'_n$$

das ist eine Summe von Zwei Nullfolge. Daher gilt $[a + b] = [a'_n + b'_n]$ □

5.2 Definition einer Multiplikation auf \mathbb{R}

$$[a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$$

5.2.1 Wohldefiniertheit der Multiplikation

Seien $a_n, a'_n \in [a_n]$ und $b_n, b'_n \in [b_n]$

Zu zeigen das gilt $a_n \cdot b_n - a'_n \cdot b_n$ ist Nullfolge Beweis:

$$\begin{aligned} & a_n \cdot b_n - a'_n \cdot b'_n \\ \Leftrightarrow & a_n \cdot b_n - a_n \cdot b'_n + a_n \cdot b'_n - a'_n \cdot b'_n \\ \Leftrightarrow & a_n \cdot (b_n - b'_n) + b'_n \cdot (a_n - a'_n) \end{aligned}$$

Nach Lemma 2 gilt das jede Cauchyfolge beschränkt ist und $(b_n - b'_n)$ und $(a_n - a'_n)$ sind Nullfolgen, draus folgt das die $[a_n \cdot b_n] = [a'_n \cdot b_n]$ gilt. □

5.3 Eigenschaften eines Körper

Ich will hier nochmal die Körperaxiome wiederholen. Ein Tripel $(K, +, \cdot)$ heißt Körper falls gilt:

1. Eigenschaften von $+$

- + abgeschlossen
- + kommutativ
- + assoziativ
- + neutrales Element
- + Inverses Element

2. Eigenschaften von \cdot

- abgeschlossen
- kommutativ
- assoziativ
- neutrales Element
- Inverses Element

3. Distributivgesetz

Jetzt wollen wir zeigen das unsere zu vor definiert Menge \mathbb{R} und unsere beiden Verknüpfungen einen Körper bilden

5.4 Nachweis der Körperaxiome bei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Abgeschlossenheit der Addition

Zu zeigen : $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n] \in \mathbb{R}$

Da die Summe von zwei Cauchyfolge wieder eine Cauchyfolge ist . Folgt die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition

Kommutativität der Addition

Zu zeigen: $[a_n] + [b_n] = [b_n] + [a_n]$

$$\begin{aligned}[a_n] + [b_n] &= [a_n + b_n] \\ &= [b_n + a_n] \\ &= [b_n] + [a_n]\end{aligned}$$

□

Assoziativität der Addition

Zu zeigen $[a_n] + ([b_n] + [c_n]) = ([a_n] + [b_n]) + [c_n]$

Beweis:

$$\begin{aligned}[a_n] + ([b_n] + [c_n]) &= [a_n] + [b_n + c_n] \\ &= [a_n + b_n + c_n] \\ &= [a_n + b_n] + [c_n] \\ &= ([a_n + b_n]) + [c_n]\end{aligned}$$

□

Neutrales Element der Addition

Für das Neutrales Element gilt folgende Gleichung

$$\begin{aligned}[a_n] + [x_n] &= [a_n] \\ [a_n + x_n] &= [a_n]\end{aligned}$$

Wie man jetzt leicht sieht sind es die zu $[0,0,0,0,0,0,0\dots] = [\text{Nullfolgen}]$ □ Äquivalenzklassen.

Das Inverse der Addition

Für das inverse Element der Addition gilt folgende Gleichung

$$\begin{aligned}[a_n] - [x_n] &= [0] \\ [a_n - x_n] &= [0]\end{aligned}$$

daraus folgt das das Inverse der Addition $-[a_n] = [-a_n]$ ist

□

Abgeschlossenheit der Multiplikation

Zu zeigen $[a_n] * [b_n] = [a_n \cdot b_n] \in \mathbb{R}$

Da das Produkt von Cauchyfolgen wieder eine Cauchyfolge ist gilt die Gleichheit

□

Kommutativität der Multiplikation

Zu zeigen: $[a_n] \cdot [b_n] = [b_n] \cdot [a_n]$

$$\begin{aligned}[a_n] \cdot [b_n] &= [a \cdot b] = [b \cdot a] \\ &= [b_n] \cdot [a_n]\end{aligned}$$

□

Assoziativität der Multiplikation Zu zeigen: $[a_n] \cdot ([b_n] \cdot [c_n]) = ([a_n] \cdot [b_n]) \cdot [c_n]$

$$\begin{aligned}
 [a_n] \cdot ([b_n] \cdot [c_n]) &= [a_n] \cdot [b_n \cdot c_n] \\
 &= [a_n \cdot b_n \cdot c_n] \\
 &= [a_n \cdot b_n][c_n] \\
 &= ([a_n] \cdot [b_n]) \cdot [c_n]
 \end{aligned}$$

□

neutrales Element der Multiplikation

Für das Neutrale Element der Multiplikation gilt folgende Gleichung

$$[a_n][x_n] = [a_n]$$

Wie man auch hier leicht sehen kann sind das die zu $[1, 1, 1, 1, 1..]$ äquivalent Folgen

□

Das Inverse Der Multiplikation

Für das Inverse der Multiplikation ist das ganz leider nicht so einfach . Wir schließen als erstes mal wieder das Neutrale Elemente der Addition aus. In diesen Fall die Klasse der Nullfolgen. Naiv würde man jetzt $[a_n]^{-1} = [a_n^{-1}]$ wählen, aber dies scheidet erstmal aus da man nicht sicher davon ausgehen kann das die Folge a_n nicht 0 enthält.

Nachdem Lemma 1.3 gilt aber das eine Cauchyfolge nur endlich viele Nullen haben kann den sonst wäre ihr Grenzwert auch 0.

Wir überlegen uns weiter das dann für die fast alle Folgenglieder einfach das inverse gebildet werden kann indem man $b_n = a_n^{-1}$ setzt. Nur für die stellen an den die Cauchyfolge $a_n = 0$ ist setzt wir $b_n = 1$.

$$b_n = \begin{cases} a_n^{-1}, & \text{falls } a_n \neq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Und es gilt $a_n \cdot b_n = [1]$ Jetzt könnte man denken man hat das inverse zu der Cauchyfolge gefunden aber das ist noch nicht ganz richtig da man noch gucken muss ob b_n überhaupt ein Cauchyfolge ist.

$$\text{ZZ: } |b_n - b_m| < \epsilon \quad \epsilon := c^2 \cdot \epsilon$$

Annahme : Wir nehmen an n, m so groß ist das man keine Null hat , das darf man machen da es nur eine endlich Anzahl von Nullen gibt.

$$\begin{aligned}
 |b_n - b_m| &= \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m} \right| \\
 &= \left| \frac{a_m - a_n}{a_m \cdot a_n} \right| \\
 &\stackrel{\text{Lemma3}}{=} \left| \frac{a_m - a_n}{c \cdot c} \right| \\
 &= \frac{1}{|c^2|} \cdot |a_m - a_n| \\
 &< \frac{1}{c^2} \cdot c^2 \cdot \epsilon = \epsilon
 \end{aligned}$$

Also ist b_n eine Cauchyfolge

□

Distributivgesetz

Ich zeige hier nur rechtsdistributiv, die linkdistributiv geht äquivalent. Zu zeigen :

$$([a_n] + [b_n]) \cdot [c_n] = [a \cdot c] + [b \cdot c]$$

$$\begin{aligned}([a_n] + [b_n]) \cdot [c_n] &= [a_n + b_n] \cdot [c_n] \\ &= [(a_n + b_n) \cdot c_n] \\ &= [a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n] \\ &= [a_n \cdot c_n] + [b_n \cdot c_n]\end{aligned}$$

□

6. Anordnungsaxiome Als erstes wollte ich noch mal die Anordnungsaxiome wiederholen:

6.1 Definition Anordnungsaxiome

Ein Körper erfüllt $(K, +, \cdot)$ erfüllt die Anordnungsaxiome falls gilt :

1. Für jedes $x \in K$ gilt einer der folgend drei Beziehungen

$$\begin{array}{ll}x > 0 \quad x = 0 \quad -x > 0 & \text{Trichotomie} \\ x > 0 \quad y > 0 \Rightarrow x + y > 0 & \text{Abgeschlossenheit gegen über Addition} \\ x > 0 \quad y > 0 \Rightarrow xy > 0 & \text{Abgeschlossenheit gegen über Multiplikation}\end{array}$$

Für den Beweis der das unser so neben konstruierter Körper auch die Anordnungsaxiome erfüllt müssen wir vorab eine Definitionen erklären.

6.2.1 Definition. Positiv

Eine Cauchyfolge (a_n) heißt **positiv**, falls es eine positive Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $a_n > \delta$ für unendlich viele n gilt.

Wie man sich leicht überlegen kann gilt das sogar für fast alle n sogar $a_n > \frac{\delta}{2}$. Der Bewei geht analog zum Lemma 3.

Wie man sich auch leicht /überlegen kann gilt. Falls eine a_n ein positiv Cauchyfolge dann ist auch jede Cauchyfolge in $[a_n]$ positiv.

6.3 Definition positive Äquivalenzklasse

Eine Klasse $[a_n]$ gehört $\mathbb{R}_0 > 0$ an, falls ihre Elemente positive Cauchyfolgen sind

6.4 Beweis der Anordnungsaxiome

Wir wissen das \mathbb{R} gegen über Addition und Multiplikation. Also der letzte Schritt zum Nachweis der Anordnungsaxiome ist zu zeigen falls eine Cauchyfolge a_n . Weder a_n positiv oder $-a_n$ positiv ist das a_n eine Nullfolge ist und wenn a_n nicht positiv ist dann ist $-a_n$ positiv

Behauptung: Sei a_n nicht positiv und keine Nullfolge, dann ist $-a_n$ positiv. Wir beweisen diese Aussage mit Hilfe eines Widerspruchsbeweis:

Beweis: Wir wählen ein beliebiges aber festes $\epsilon > 0$.

Dann gilt für fast alle n $-a_n < \epsilon$ aber da $a_n < \epsilon$ für fast alle n gilt.

$$\Rightarrow |(a_n)| < \epsilon$$

\Rightarrow laut der Definition 1.1 eine Nullfolge ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung das a_n keine Nullfolge ist. \square

Beweis:

Annahme: a_n ist weder positiv noch negativ

Wir wählen ein festes aber beliebiges $\epsilon > 0$ so gilt hoffentlich für fast alle n $a_n < \epsilon$ aber da a_n auch nicht negativ ist gilt auch $|(a_n)| < \epsilon$

\Rightarrow laut der Definition 1.1 eine Nullfolge ist.

Damit haben wir nachwießen das \mathbb{R} die Anordnungsaxiome erfüllt sind. \square

7. Resümee :

Wir haben uns ein Körper \mathbb{R} konstruiert, der die Anordnungsaxiome erfüllt. Aber bisher haben gegenüber von \mathbb{Q} nicht viel gewonnen. Denn wir haben nur eine große Menge wie \mathbb{Q} bekommen, aber das eigentlich Ziel ist es nach zu wissen das jede Cauchyfolge in \mathbb{R} in ihren Grenzwert in \mathbb{R} hat